Planche n° 12. Espaces préhilbertiens

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (* I)** (Polynômes de Legendre)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $P|Q = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

a) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, |\,)$.
b) Déterminer $\|L_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2) Déterminer l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de E.

3) Déterminer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice n° 2 (* I)** (Polynômes d'Hermite)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = \left(X^n e^{-X}\right)^{(n)} e^X$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de h_n. Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E.
b) Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ).
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien (E, φ).

Exercice n° 3 (I)** (Polynômes de Tchebychev)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n-ème polynôme de Tchebychev de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2) a) Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ).
b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Exercice n° 4 (I)**

On note E l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-dire les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2) Pour $(u, v) \in E^2$, on pose $\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice n° 5 (* I)

Soit Φ l'application qui à deux matrices carrées réelles A et B de format n associe $\mathrm{Tr}({}^tA \times B)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est ce que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice n° 6 (****) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme, notée $\|\ \|$, vérifiant l'identité du parallélogramme. Montrer que cette norme est hilbertienne.

Exercice n° 7 (**)

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, ..., e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout vecteur x de E, on ait $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$. Montrer que la famille $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice n° 8 (***)

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour P et Q polynômes donnés, on pose $\Phi(P,Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\,dt$.

1) Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour Φ telle que, pour tout entier naturel n, $\deg(P_n) = n$.
3) (****) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme P_n, $n \in \mathbb{N}^*$, a n racines réelles simples.

Exercice n° 9 (* I)** (Matrices et déterminants de Gram) Soit E un espace préhilbertien réel.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,...,x_n)$ dans E^n, on pose $G(x_1,...,x_n) = (x_i|x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice de Gram) puis $\gamma(x_1,...,x_n) = \det(G(x_1,...,x_n))$ (déterminant de Gram).

1) Montrer que $\mathrm{rg}(G(x_1,...,x_n)) = \mathrm{rg}(x_1,...,x_n)$.

2) Montrer que la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1,...,x_n) = 0$ et que la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1,...,x_n) > 0$.

3) On suppose que la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre dans E. On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1,...,x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x,F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|^2$). Montrer que $d(x,F) = \sqrt{\dfrac{\gamma(x,x_1,\ldots,x_n)}{\gamma(x_1,\ldots,x_n)}}$.